Φυλλάδιο #1

27/3/17

1) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

$$\sum \frac{(-3)^k}{4^{k-2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^k \cdot (4)^{-2}} = \frac{-12}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-48}{7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 5^k}{7^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{7}\right)^k + \left(\frac{5}{7}\right)^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^k$$

$$\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}} + \frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}} = \ldots = \frac{13}{4}$$

2) i) $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{1}{e} \neq 0$$ Άρα η σειρά αποκλίνει

ii) $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ κριτήριο ρίζας Cauchy

$$= \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} \to \frac{1}{e} < 1$$ Άρα η σειρά συγκλίνει

αποκλίνει

$a_k = \frac{k^3}{2^k}$

1ος τρόπος: (Κριτήριο λόγου)

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{(k+1)^3}{2^{k+1}}}{\frac{k^3}{2^k}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^3 \to \frac{1}{2} < 1$$ Άρα συγκλίνει

2ος τρόπος: (Κριτήριο ρίζας)

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{k^3}{2^k}} = \frac{(\sqrt[k]{k})^3}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$ Άρα συγκλίνει

• $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt[4]{k^3}} = \frac{(-1)^k}{k^{3/4}}$ Θέτοντας $b_k = \frac{1}{k^{3/4}}$

Έχουμε
- $b_k \geq 0 \ \forall k$
- b_k φθίνουσα
- $b_k \to 0$

Άρα από κ. Leibnitz η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ συγκλίνει

• $a_k = \frac{3k^2+4k+1}{3k^3+2k^2+k+1}$ Θέτω $b_k = \frac{3k^2}{3k^3} = \frac{1}{k}$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{3k^3+4k^2+k}{3k^3+2k^2+k+1} \to 1, \quad \mu\varepsilon\ 0<1<+\infty$$

$a_k \geq 0$
$b_k \geq 0$

Ξέρω ~~...~~ από οριακό κριτήριο σύγκρισης αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

• $a_k = \dfrac{k^2+3}{k^4+3k+1}$ Θέτω $b_k = \dfrac{k^2}{k^4} = \dfrac{1}{k^2}$ (λόγος Μεγιστοβάθμιων)

Ξέρω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει

Εφόσον $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ $\forall k$

$\dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{k^4+3k^2}{k^4+3k+1} \to 1$ με $0<l<+\infty$

Άρα από οριακό κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ θα συγκλίνει

3) • $a_k = (-1)^k \dfrac{k!}{k^k}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{k!(k+1)k^k}{(k+1)^k(k+1)k!} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{1}{e} < 1$$

Άρα συγκλίνει απόλυτα από κ. λόγου, άρα και απλά

• $a_k = (-1)^k \dfrac{k+3}{k^2+2k}$ $|a_k| = \dfrac{k+3}{k^2+2k}$ Θέτουμε $b_k = \dfrac{1}{k}$

$\dfrac{|a_k|}{b_k} = \dfrac{k^2+3}{k^2+2k} = \dfrac{1+3\frac{1}{k}}{1+2\frac{1}{k}} \to 1$

Εφόσον η $\sum b_k$ αποκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει με $|a_k| \geq 0$ $b_k > 0$, από ορ. κρ. σύγκρισης η $\sum |a_k|$ αποκλίνει

Εφόσον η $\sum_{k=1} |a_k|$ αποκλίνει, εξετάζουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Θέτω $x_k = \frac{k+3}{k^2+2k}$ Εξετάζω αν η x_k είναι φθίνουσα

i) $x_k \geq 0$

ii) $x_k \to 0$

iii) x_k φθίνουσα δηλ. $x_{k+1} < x_k \ \forall k \iff$

$$\frac{k+1+3}{(k+1)^2+2(k+1)} \leq \frac{k+3}{k^2+2k} \iff (k+4)(k^2+2k) \leq ((k+1)^2+(2k+1))(k+3)$$

$$\iff k^3+2k^2+4k^2+8k \leq k^3+4k^2+3k+3k^2+12k+9$$

$$\iff 0 \leq k^2+7k+9$$, που ισχύει εφόσον $k \in \mathbb{N}$

Άρα x_k φθίνουσα

Οπότε από κ. Leibnitz η $\sum(-1)^k x_k$ συγκλίνει γ) $a_k = \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

$|a_k| = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{1/2}}$ Η $\sum |a_k|$ αποκλίνει ~~συγκλίνει~~ $(1/2 < 1)$

Εφαρμόζοντας Leibnitz η $\sum a_k$ συγκλίνει

δ) $a_k = \frac{\sin(2k\alpha + \sqrt{3})}{\sqrt{k^3}}$ $\quad a_k \le \frac{1}{k^{3/2}}$

Εφόσον η $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ είναι συγκλίνουσα η $\sum |a_k|$ είναι συγκλίνουσα

δηλ. η $\sum a_k$ συγκλίνει απόλυτα
(άρα και απλά)

(*) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\quad a_k = \frac{x^k k!}{k^k}$ για ποια x συγκλίνει;

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{x^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{x^k k!}{k^k}} = \overset{\text{όπως πριν}}{\ldots} = \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{|x|}{e}$$

Αν $|x| < e$ δηλ. αν $-e < x < e$ από κριτήριο λόγου η $\sum a_k$ συγκλίνει απόλυτα άρα και απλά.

Αν $|x| > e$ (δηλ. αν $x < -e$ ή $x < e$) από κριτήριο λόγου η σειρά αποκλίνει.

Αν $|x| = e$ τότε (όπως δείξαμε προηγουμένως) $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} > 1$ $\forall k$

$\Rightarrow |a_{k+1}| > |a_k| \ \forall k$

Συνεπώς $|a_k| \not\to 0$ άρα $a_k \not\to 0$ η $\sum a_k$ αποκλίνει

5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = ;$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

Θέτοντας $x_k = \frac{1}{2} \frac{1}{k(k+1)} \quad \forall k$

$a_k = x_k - x_{k+1}$

$S_n = a_1 + \dots + a_n = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{n+1}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \longrightarrow \frac{1}{4}$

6) $a_k \geq 0 \ \forall k$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Ν.δ.ο. η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει

Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει ισχύει $a_k \to 0$

Από τον ορισμό του ορίου ακολ. για $\varepsilon = 1$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ ισ

$|a_k - 0| < 1 \quad \forall k \geq k_0 \xRightarrow{a_k \geq 0} 0 \leq a_k < 1 \quad \forall k \geq k_0 \ (*)$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

7) (Σταθερότητες → Leibnitz)

Αν $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ Η Σa_k συγκλίνει (έπεται από Leibnitz)

$\Sigma a_k^2 = \Sigma \frac{1}{k}$ αποκλίνει

8) $a_k \geq 0$ $\forall k$ ν.δ.ο. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ συγκλίνουσα

Αν $a_k \neq 0$ $\frac{a_k}{1+k^2 a_k} \leq \frac{a_k}{k^2 a_k} = \frac{1}{k^2}$

Αν $a_k = 0$ $\frac{a_k}{1+k^2 a_k} = 0 \leq \frac{1}{k^2}$

Συνεπώς $0 \leq \frac{a_k}{1+k^2 a_k} \leq \frac{1}{k^2}$ $\forall k$ Εφόσον η $\Sigma \frac{1}{k^2}$ συγκλίνουσα θα συγκλίνει και η $\Sigma \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$

9) Για ποια x συγκλίνει η καθεμιά από τις παρακάτω σειρές;

→ $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ $a_k = k^k$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|k|^k} = |k| = k \longrightarrow +\infty$ Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $\frac{1}{+\infty} = 0$

Συγκλίνει μόνο για $x=0$

→ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{4^k} x_k$ $\quad a_k = \frac{k^4}{4^k}$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{(\sqrt[k]{k})^4}{4} \to \frac{1}{4}$

Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $R = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

Όταν $|x| < 4$ συγκλίνει

Όταν $|x| > 4$ αποκλίνει

Όταν $|x| = 4$: $\frac{k^4}{4^k} |x|^k \not\to 0$ άρα η σειρά αποκλίνει

→ $\sum \frac{2^k x^k}{k^2}$ $\quad a_k = \frac{2^k}{k^2}$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2}{(\sqrt[k]{k})^2} \to 2$ $\quad R = \frac{1}{2}$ ακτίνα σύγκλισης

Για $|x| < 1/2$ συγκλίνει

Για $|x| > 1/2$ αποκλίνει

Για $x = \frac{1}{2}$ η σειρά γράφεται $\sum \frac{2^k (\frac{1}{2})^k}{k^2} = \sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει

Για $x = -\frac{1}{2}$ $\sum \frac{2^k (-\frac{1}{2})^k}{k^2} = \sum (-1)^k \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει απόλυτα άρα συγκλίνει

$\to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k \qquad a_k = \frac{(-1)^k}{k}$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1$ Ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{1}{1} = 1$

Για $|x| < 1$ συγκλ.

Για $|x| > 1$ αποκλ.

Για $x = 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ συγκλίνει (Leibnitz)

Για $x = -1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει

10) $\to \sum a_k \qquad a_k = \sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k} = x_{k+1} - x_k$

Θέτοντας $x_k = \sqrt[3]{k}$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_{n+1} - x_n) =$

$= x_{n+1} - x_1 = \sqrt[3]{n+1} - 1 \longrightarrow +\infty$

$\to a_k = \sqrt{k^2+1} - k = \frac{(k^2+1) - k^2}{\sqrt{k^2+1} + k} = \frac{1}{k + \sqrt{k^2+1}}$ Θέτουμε $b_k = \frac{1}{k}$

$a_k > 0$
$b_k > 0 \quad \forall k \qquad \frac{a_k}{b_k} \longrightarrow \dots \frac{1}{2}$

Εφόσον η $\sum b_k = \sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει θα αποκλίνει και η $\sum a_k$ (από οριακό κριτήριο σύγκρισης)

$\rightarrow \quad a_k = \dfrac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{k} = \dfrac{(k+2)-k}{k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})} = \dfrac{2}{k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})} \leq \dfrac{2}{k\sqrt{k}} = \dfrac{2}{k^{3/2}}$

$0 \leq a_k \leq 2\dfrac{1}{k^{3/2}} \quad \forall k \qquad$ Η $\sum \dfrac{1}{k^{3/2}}$ συγκλίνει άρα

η $\sum a_k$ συγκλίνει

$a_k = \left(k\left(e^{1/k}-1\right)-\dfrac{1}{4}\right)^k$

$\sqrt[k]{|a_k|} = k\left(e^{1/k}-1\right)-\dfrac{1}{4} = \dfrac{e^{1/k}-1}{1/k} - \dfrac{1}{4}$

Ξέρουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ και $\dfrac{1}{k}\to 0$ άρα

$\dfrac{e^{1/k}-1}{1/k} \longrightarrow 1$

Άρα $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow 1-\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} < 1$ Από κριτήριο ρίζας η $\sum a_k$ συγκλίνει

11) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b^k k^b$ (όπου $b \in \mathbb{R}$) θέτουμε $a_k = b^k k^b$

$\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \dfrac{|b|^{k+1}(k+1)^b}{|b|^k k^b} = |b|\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^b \longrightarrow |b|$

→ Αν $|b|<1$ συγκλίνει

→ Αν $|b|>1$ αποκλίνει

→ Αν $b=1$ η $\sum a_k$ αποκλίνει

→ Για $b=-1$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{k}$

με κριτ. Leibnitz συγκλίνει

▶ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$ όπου $0<q<p$

$a_k = \frac{1}{k^p - k^q}$ θέτουμε $b_k = \frac{1}{k^p}$, $a_k>0$, $b_k>0$ $\forall k$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{k^p-k^q}}{\frac{1}{k^p}} = \frac{k^p}{k^p-k^q} = \frac{1}{1-k^{q-p}} \longrightarrow 1$$

Άρα η Σa_k συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η Σb_k και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $p>1$

▶ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$ όπου $0<q<p$

$a_k = \frac{1}{p^k - q^k}$ θέτουμε $b_k = \frac{1}{p^k}$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{p^k-q^k}}{\frac{1}{p^k}} = \frac{p^k}{p^k-q^k} = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k} \to 1$$

Άρα η Σa_k συγκλίνει αν και μόνο αν η Σb_k συγκλίνει

που συμβαίνει αν και μόνο αν $\frac{1}{p}<1$ δηλ. $p>1$

▶ $\sum_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ $\quad a_k = k^p \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k} \cdot (\sqrt{k+1})} =$

$$= \frac{k^p (k-1)-k}{(\sqrt{k})(\sqrt{k+1})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

Θέτουμε $b_k = k^{p-3/2} = \frac{1}{k^{3/2-p}}$ $\left(\begin{array}{c} 3/2 - p > 1 \\ p < 1/2 \end{array} \right)$

$\frac{a_k}{b_k} = \ldots \to 1/2$

$a_k > 0,\ b_k > 0 \ \forall k$

Άρα από οριακό κριτήριο σύγκρισης η $\sum a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$

η $\sum b_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \frac{3}{2} - p > 1 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$